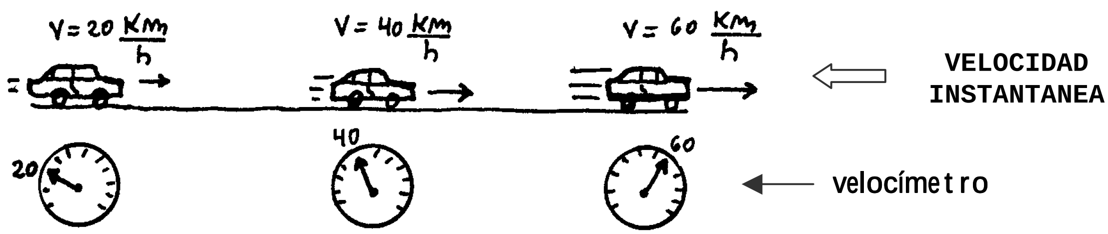
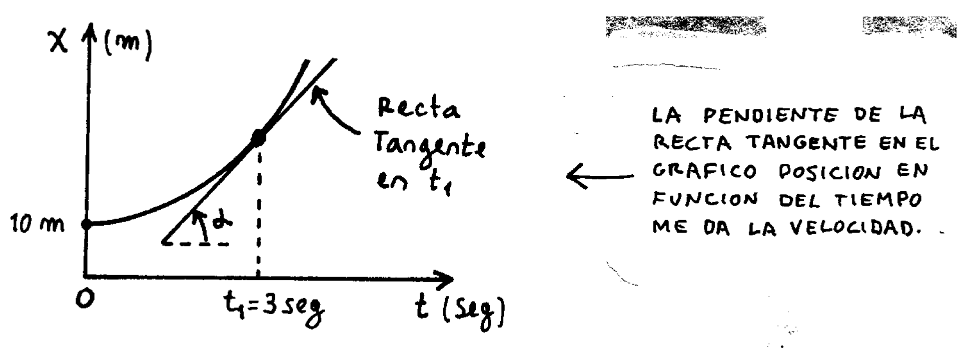
VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN EL MRUV (leer).

En el movimiento uniformemente variado la velocidad va cambiando todo el tiempo. La velocidad instantánea es la que tiene el tipo justo en un momento determinado. El velocímetro de los autos va marcando todo el tiempo la velocidad instantánea.

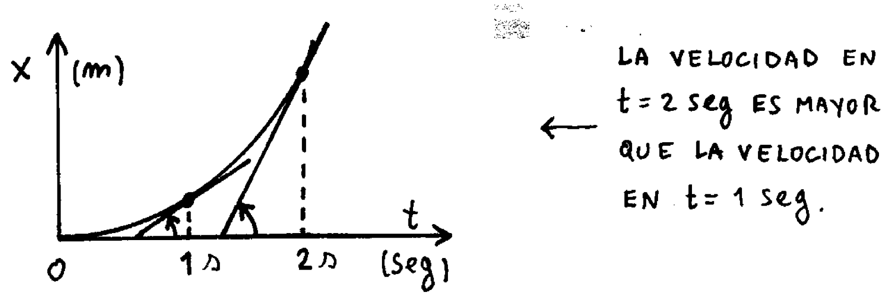


Ahora quiero que le prestes atención a una cuestión importante. Suponé que agarro el gráfico de posición en función del tiempo y trazo la tangente a la parábola en algún lugar. La pendiente de esta recta tangente me va a dar la velocidad instantánea en ese momento. Fijate:



Es decir, yo tengo la parábola. Ahora lo que hago es agarrar una regla y trazar la tangente en algún punto determinado (por ejemplo en t_1 = 3 seg). Esa recta va a formar un ángulo alfa y va a tener una determinada inclinación, o sea, una determinada pendiente. (pendiente = inclinación). Midiendo esa pendiente yo tengo la velocidad instantánea en ese momento (a los 3 segundos).

Es un poco largo de explicar porqué esto es así, pero es así. Lo vas a ver más adelante en análisis. (Derivada y todo eso. Es fácil).
De acá puedo sacar como conclusión que cuanto mayor sea la inclinación de la recta tangente, mayor será la velocidad del tipo en ese momento.
Quiero decir esto:



En este gráfico la pendiente de la recta para t = 2 seg es mayor que la pendiente de la recta para t = 1 seg. Esto me dice la que la velocidad a los 2 seg es mayor que la velocidad en 1 seg . Esto es razonable. Este gráfico representa a un tipo que tiene aceleración positiva y que se mueve cada vez más rápido.

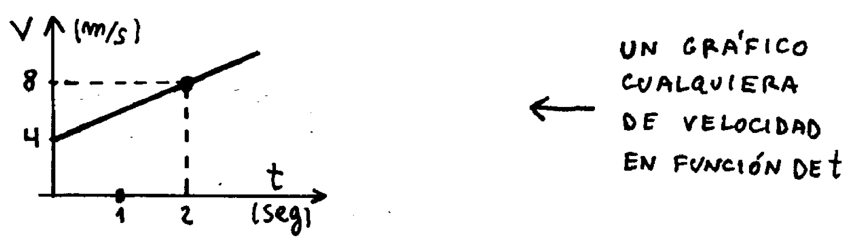
Pregunta...

¿ Cuál será la velocidad del tipo para t = 0 ? (ojo).

Rta: Bueno, la velocidad tendrá que ser **cero** porque la recta tangente ahí es horizontal ( ).

ANÁLISIS DE LA PENDIENTE y DEL ÁREA DEL GRÁFICO $V = V_{(t)}$

Supongamos que tengo un gráfico cualquiera de velocidad en función del tiempo. Por ejemplo éste:

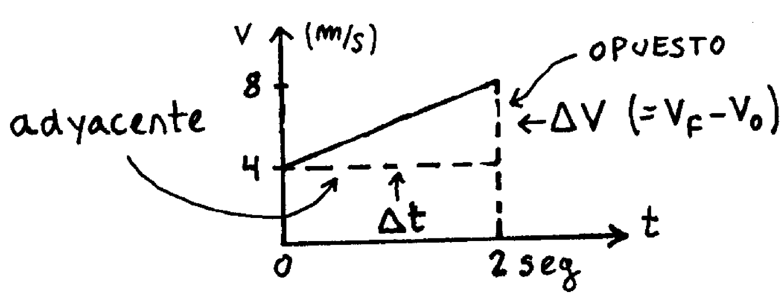


Este gráfico indica que lo que se está moviendo salió con una velocidad inicial de 4 m/s y está aumentando su velocidad en 2 m/s, por cada segundo que pasa.

Pregunta:

¿ Qué obtengo si calculo la pendiente de la recta del gráfico ?

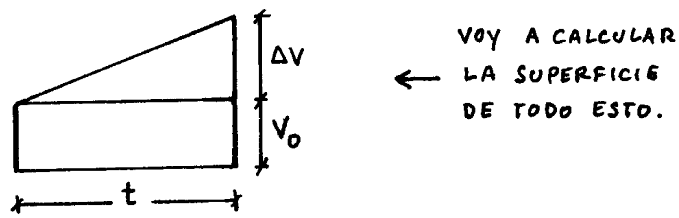
Rta: Obtengo la aceleración. Esta aceleración sale de mirar el siguiente dibujito:



En este caso el opuesto es Δv (la variación de velocidad), y el adyacente es Δt (el intervalo de tiempo).
De manera que, hacer la cuenta opuesto sobre adyacente es hacer la cuenta delta V sobre delta t (Δv / Δt). Y eso es justamente la aceleración !
En este caso en especial daría así:

$$pend = \frac{op}{ady} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8\,m/s - 4\,m/s}{2s - 0s} = 2\,\frac{m}{s^2} \qquad \leftarrow \text{Aceleración}$$

¿ Y si calculo el <u>**área**</u> que está bajo la recta que obtengo ?
Veamos:



A ver si me seguís: El área del coso así $\trianglelefteq$ va a ser la de este $\square$ + la de este $\triangle$.

$$A_{\trianglelefteq} = A_{\square} + A_{\triangle} = b \cdot h + \frac{b \cdot h}{2} = v_0 \cdot t + \frac{t \cdot \overbrace{\Delta v}^{\Delta v = a \cdot t}}{2}$$

$$\Rightarrow A_{\trianglelefteq} = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2}\, a \cdot t^2 \qquad \leftarrow \text{Esto es } x - x_0$$

$$A_{\trianglelefteq} = \Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad A_{\trianglelefteq} = \text{Espacio recorrido} \qquad \leftarrow \quad \text{Recordar}$$

Ahora en el ejemplo que puse antes, el área va a ser:

$$A_{\trianglelefteq} = A_{\square} + A_{\triangle} = 2\,seg \cdot 4\,\frac{m}{s} + \frac{2\,seg \cdot (\,8\,m/s - 4\,m/s\,)}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad A_{\trianglerighteq} = 12\,m \qquad \leftarrow \qquad \text{Espacio recorrido}$$

MATEMÁTICA: Solución de una ecuación cuadrática

Si este tema no aparece en el parcial aparecerá más adelante, pero en algún momento te vas a topar con él y por eso tenés que saberlo.
Una ecuación cuadrática es una ecuación del tipo:

$$\boxed{a\,X^2 + b\,X + C = 0} \quad \longleftarrow \text{ ECUACION CUADRATICA}$$

Por ejemplo : $X^2 - 6X + 8 = 0$. Lo que uno siempre busca son los valores de equis tales que reemplazados en $X^2 - 6X + 8$ hagan que todo el choclo dé 0 (Cero).
Esos valores se llaman **soluciones de la ecuación** o **raíces de la ecuación.**
En este caso, esos valores son 2 y 4.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \qquad \leftarrow \quad \text{Son las raíces de la ecuación } x^2 - 6x + 8 = 0$$

Una ecuación cuadrática puede tener 2 soluciones (como en este caso); una sola solución (las dos raíces son iguales), o ninguna solución (raíces imaginarias).
Para calcular las raíces de la ecuación cuadrática se usa la siguiente fórmula:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} \qquad \leftarrow$$

Con esto obtengo las soluciones x_1 y x_2 de la ec $ax^2 + bx + c = 0$

Para el ejemplo que puse que era $X^2 - 6X + 8 = 0$ tengo:

$$\underbrace{1}_{a}x^2 - \underbrace{6}_{b}x + \underbrace{8}_{c} = 0$$

Entonces :

ojo!

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \qquad ; \qquad x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

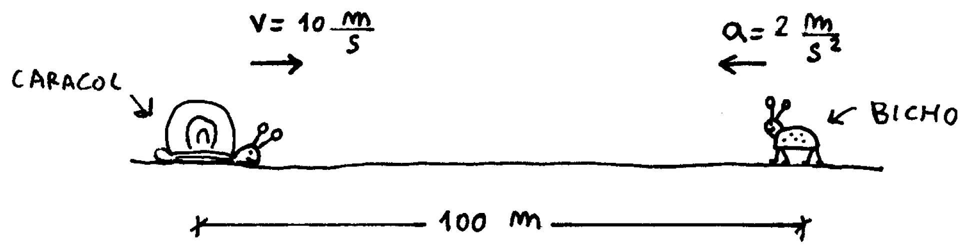
Este tema tenés que saberlo. En algún momento va a aparecer.
No es difícil. Solo hay que remplazar los valores de a, b y c en la fórmula choclaza.
Incluso hay algunas calculadoras tienen ya la fórmula metida adentro.

ENCUENTRO EN EL MRUV (Lo toman)

Los problemas de encuentro en donde uno de los móviles (o los 2) se mueven con aceleración, se resuelven haciendo lo mismo que puse antes en la parte de MRU.

Te lo muestro con un ejemplo:

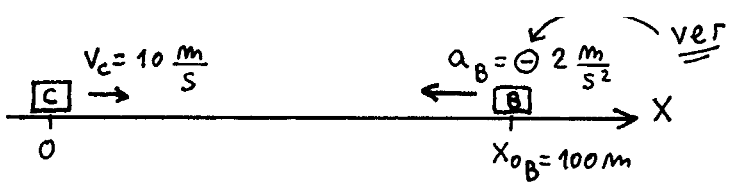
Dado el dibujo de la figura calcular: qué tiempo tardan en encontrarse los 2 móviles, y el lugar donde se encuentran.



Este es un caso de encuentro entre un móvil que se mueve con <u>velocidad constante</u> (el caracol) y otro que se mueve con <u>aceleración constante</u> (el bicho).

Para resolver esto hago:

1 - Esquema de lo que pasa. Elijo sistema de referencia. Marco posiciones iniciales y velocidades iniciales.



2 - Planteo las ecuaciones horarias para cada móvil.

ver

Caracol (MRU)

$$\begin{cases} x_C = 0 + 10\dfrac{m}{s}\cdot t \\ v_C = 10\dfrac{m}{s} = cte \\ a_C = 0 \end{cases}$$

Bicho (MRUV)

$$\begin{cases} x_B = 100m + 0\cdot t + \frac{1}{2}\left(-2\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot t^2 \\ v_B = 0 + \left(-2\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot t \\ a_B = -2\dfrac{m}{s^2} = cte. \end{cases}$$

3 - Escribo la famosa condición de encuentro:

$x_C = x_B$ para $t = t_{e.}$

4 - Igualo las ecuaciones y despejo el tiempo de encuentro t_e :

$$10\,\frac{m}{s}\cdot t_e = 100\,m - 1\,\frac{m}{s^2}\cdot t_e^{\,2} \quad\Rightarrow\quad 1\,\frac{m}{s^2}\cdot t_e^{\,2} + 10\,\frac{m}{s}\cdot t_e - 100\,m = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática que se resuelve usando la fórmula que puse antes:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$\Rightarrow\ t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10\frac{m}{s}\right)^2 - 4\cdot 1\frac{m}{s^2}\cdot(-100m)}}{2\cdot 1\frac{m}{s^2}} \qquad \Rightarrow\ t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm \sqrt{500\frac{m^2}{s^2}}}{2\frac{m}{s^2}}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{t_1 = 6{,}18\ seg}\ ;\ \cancel{t_2 = -16{,}18\ seg} \qquad \leftarrow\ \text{Tiempo de encuentro.}$$

Es decir que el encuentro se produce a los 6,18 segundos. La solución negativa no va.
Lo que me está diciendo el (**-**) es que los tipos se hubieran encontrado 16,18 segundos **antes** de salir. Como esta solución no tiene sentido físico, la descarto.(Significa: no la tomo en cuenta).
Para calcular la posición de encuentro reemplazo 6,18 seg en la 1ª ec. horaria.

$$x_c = 10\,\frac{m}{s}\cdot t \qquad \Rightarrow\quad x_e = 10\,\frac{m}{s}\cdot t_e \ \ \text{6,18 seg.}$$

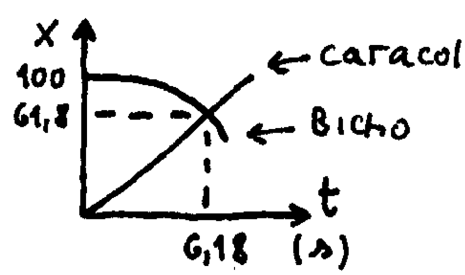
$$\Rightarrow\quad \boxed{x_c = 61{,}8\ m} \quad \leftarrow\ \text{Posición de encuentro.}$$

Para verificar puedo reemplazar t_e en la otra ecuación horaria y ver si da lo mismo.
Tenía:

$$\Rightarrow x_e = 100\,m - 1\,\frac{m}{s}\cdot t_e^{\,2}$$

$$\Rightarrow x_e = 100\,m - 1\,\frac{m}{s}\cdot(\,6{,}18\ \ s\,)^2$$

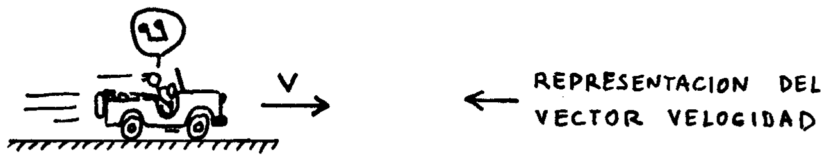
$$\Rightarrow\ \underline{x_e = 61{,}8\,m} \quad (\,\text{verifica}\,)$$



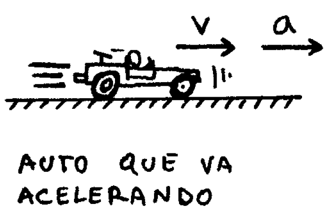
La solución del problema es: El encuentro entre el caracol y el bicho se produce a los 6,18 seg y a 61,8 m del caracol.

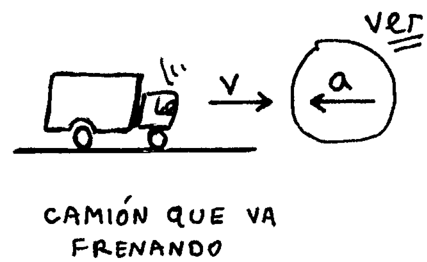
LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN COMO VECTORES

La velocidad y la aceleración son vectores. ¿ Qué quiere decir esto ?.
Quiere decir que puedo representar la velocidad y la aceleración por una flecha.
Si por ejemplo, la velocidad va así → , la flecha se pone apuntando así → .

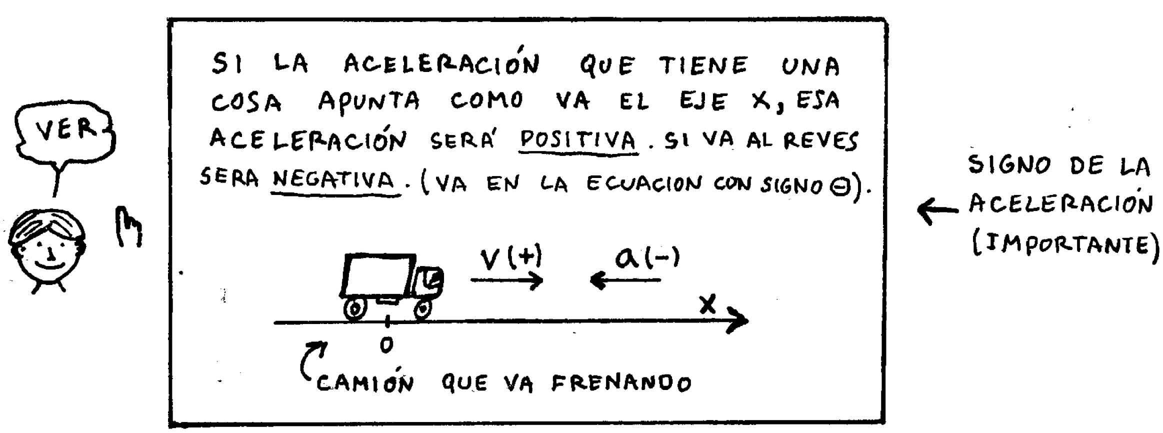


La situación del dibujito es el caso de un tipo que se mueve con velocidad constante.
Fijate ahora estas otras 2 posibilidades:



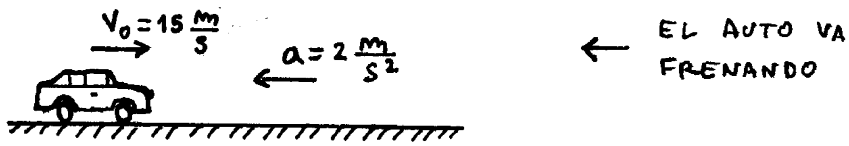


Lo que quiero que veas es que si el auto va para la derecha, la velocidad **siempre** para la derecha, pero la aceleración NO. (Es decir, puede que sí, puede que no, pero no es seguro).
Esta cuestión es importante por lo siguiente: si la velocidad que tiene una cosa va en el mismo sentido que el eje x, esa velocidad será (**+**) . Si va al revés será (**-**) .
Lo mismo pasa con la aceleración (y acá viene el asunto). Fijate :

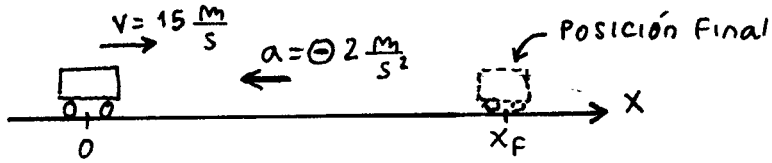


Ejemplo: **Un auto que viene con una velocidad de 54 Km/h (15 m/s) frena durante 3 seg con una aceleración de 2m/s ^{2} . ¿ Qué distancia recorrió en ese intervalo ?.**

Hago un esquema de lo que pasa. El auto viene a 54 por hora y empieza a frenar:



Ahora tomo un sistema de referencia y planteo las ecuaciones horarias:



$$\begin{cases} x_B = 0 + 15\,\dfrac{m}{s}\cdot t + \dfrac{1}{2}\left(-2\,\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot t^2 \\ v_B = 15\,\dfrac{m}{s} + \left(-2\,\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot\ t \qquad \leftarrow \text{ Ecuaciones horarias.} \\ a_B = -2\,\dfrac{m}{s^2} = cte. \end{cases}$$

En la 1ª ec. horaria reemplazo t por 3 seg y calculo la posición final:

ver

$$x_f = 15\,\frac{m}{s}\cdot 3\,seg - 1\,\frac{m}{s}\cdot(3seg)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_f = 36\,m} \quad \leftarrow \text{ Posición final}$$

<u>Conclusión</u>: En los tres segundos el tipo recorre 36 metros.

Si yo me hubiera equivocado en el signo de la aceleración y la hubiera puesto positiva , la cosa habría quedado así:

$$x_f = 15\,\frac{m}{s}\cdot 3\,seg + 1\,\frac{m}{s}\cdot(3seg)^2$$

$$\Rightarrow \quad X_f = 54\,m \qquad (\text{ Nada que ver...})$$

Lo mismo hubiera pasado si hubiera calculado la velocidad final después de los 3 seg:

$$v_f = 15\frac{m}{s} + 2\frac{m}{s^2}\cdot 3\,seg$$

$$\Rightarrow \quad v_f = 21\frac{m}{s} \qquad \leftarrow \text{HORROR!}$$

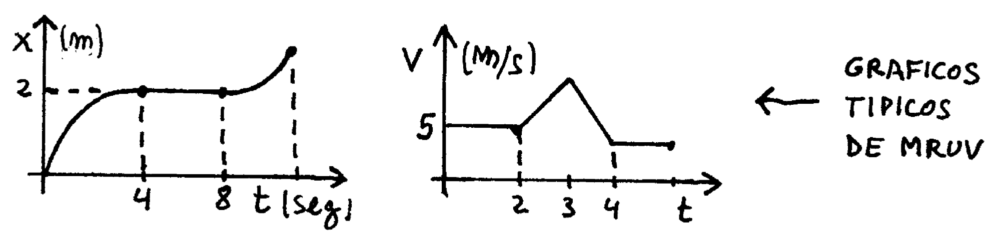
Esto no puede ser. La velocidad final tiene que dar **<u>menor</u>** que la inicial !. (el tipo está frenando).
Por eso: <u>ojo</u> con el signo de la aceleración. Si lo ponés mal, <u>todo el problema da mal</u>.

<u>CÓMO RESOLVER PROBLEMAS DE MRUV</u>

Generalmente hay dos tipos de problemas de MRUV que suelen tomar:

1 - Ejercicios de MRUV donde hay que usar fórmulas y ecuaciones.
2 - Ejercicios de MRUV donde hay que usar gráficos.

Los problemas de gráficos no tienen una manera especial de resolverse. Cada uno es diferente. Hay que mirar bien el gráfico y pensar.
Suelen darte la representación de la posición en función del tiempo o de la velocidad en función del tiempo. Por ejemplo, pueden ser cosas así :



Dado el gráfico pueden pedirte que calcules cualquier cosa. Puede ser la velocidad en un punto, la aceleración en un intervalo, el espacio recorrido. No sé, cualquier cosa.
Para resolver esto hay que ir analizando pendientes, áreas y pensar un poco...
Si el problema es de MRUV propiamente dicho, lo que hay que hacer es un esquema de lo que el problema plantea, tomar un sistema de referencia y escribir las ecuaciones horarias. Y por favor acordate de una cosa :

Todo problema de MRUV tiene que poder resolverse usando la 1ra y la 2da ecuación horaria <u>NADA MAS</u>. Puede ser que haya que usar primero una ecuación y después la otra. Puede ser que haya que combinar las ecuaciones. Puede ser cualquier cosa, pero todo problema tiene que salir de ahí.

Aclaro esto porque a veces vos venís con miles de ecuaciones planteadas. Está MAL. Te estás complicando. Son sólo DOS las ecuaciones que permiten resolver el problema. Si el tiempo no es dato, tal vez pueda convenir usar la ecuación complementaria, pero eso se hace para ahorrarse de hacer cuentas, nada más. Usando solamente la 1ª y la 2ª ecuación horaria el problema TIENE QUE SALIR. Repito: Tal vez haya que hacer más cuentas, pero usando solo 2 ecuaciones el problema tiene que salir.

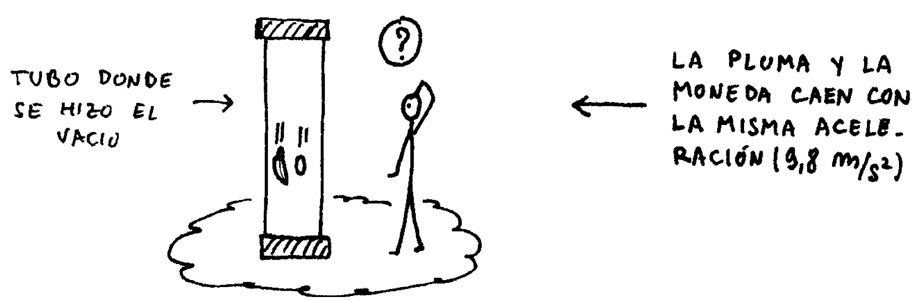
Fin Teoría de MRUV.

CAÍDA LIBRE y TIRO VERTICAL

Suponé que un tipo va a la ventana y deja caer una cosa. Una moneda, por ejemplo.

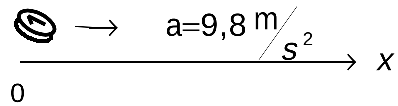
Claro, el tipo tiene razón. Cuando uno deja caer una cosa, lo que cae, cae con MRUV. Toda cosa que uno suelte va a caer con una aceleración de 9,8 m/s^2. Puede ser una moneda, una pluma o un elefante. Si suponemos que no hay resistencia del aire, todas las cosas caen con la misma aceleración.

¿ Quién descubrió esto ? Obvio. Galileo . (IDOLO !).
Este hecho es medio raro pero es así. En la realidad real, una pluma cae más despacio que una moneda por la resistencia que opone el aire. Pero si vos sacás el aire, la pluma y la moneda van a ir cayendo todo el tiempo juntas. (Este es un experimento que se puede hacer).

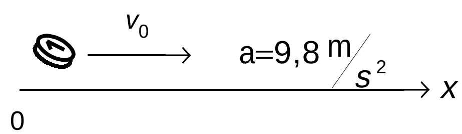


Esta aceleración con la que caen las cosas hacia la Tierra se llama aceleración de la gravedad. Se la denomina con la letra **g** y siempre apunta hacia abajo.

En el caso de la moneda que cae yo puedo " acostar " al problema y lo que tendría sería un objeto que acelera con aceleración 9,8 m / s^2. Vendría a ser algo así :



Y si lo hubiera tirado con velocidad inicial para abajo tendría esto :

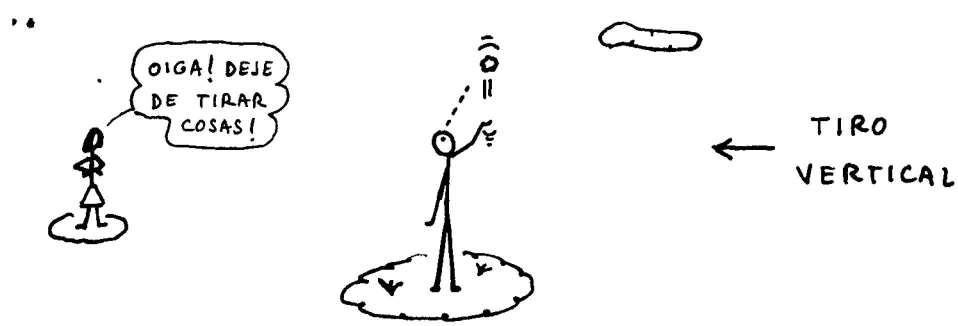


Es decir que un problema de caída libre no se diferencia para nada de un problema de MRUV. Es más, la caída libre <u>es simplemente un ejemplo de un MRUV.</u> Para resolver estos problemas puedo aplicar los mismos razonamientos, las mismas ecuaciones, todo lo mismo. La única diferencia es que antes todo pasaba en un eje horizontal. Ahora todo pasa en un eje vertical. Lo demás es todo igual.

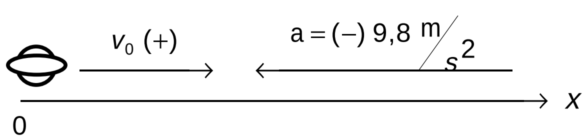
Pregunta:

¿ Y qué pasa con el tiro vertical ?.

<u>Rta</u>: Y bueno, con el tiro vertical es la misma historia. Tiro vertical significa tirar una cosa para arriba.

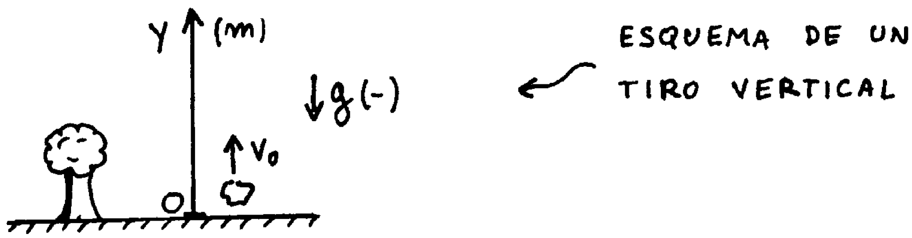


Si yo acuesto una situación de tiro vertical, lo que voy a obtener va a ser esto:



Es decir, tengo la situación de una cosa que sale con una determinada velocidad inicial y se va frenando debido a una aceleración negativa.

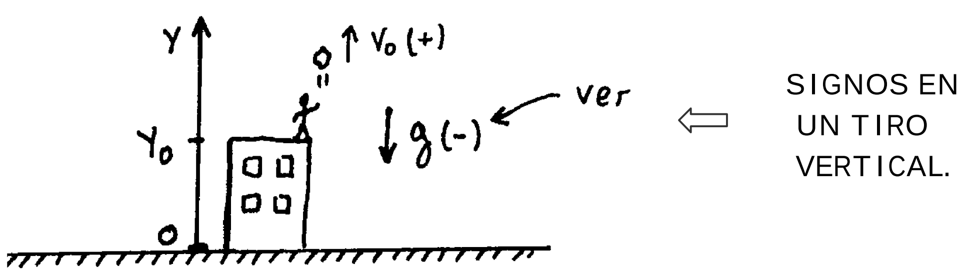
¿ Y esto qué es ? Y bueno, es un movimiento rectilíneo uniformemente variado.
Si hiciera un esquema tomando un eje vertical **y**, tendría algo así:



Conclusión:
Tanto la caída libre como el tiro vertical son casos de movimiento rectilíneo uniformemente variado. Los problemas se piensan de la misma manera y se resuelven de la misma manera. Las ecuaciones son las mismas. Los gráficos son los mismos.
Caída libre y tiro vertical no son un tema nuevo, son sólo la aplicación del tema anterior.
Quien sabe MRUV, sabe caída libre y tiro vertical. (Sólo que no sabe que lo sabe).

CÓMO RESOLVER PROBLEMAS DE CAÍDA LIBRE y TIRO VERTICAL

1 - Hago un esquema de lo que pasa. Sobre ese esquema tomo un eje vertical **y**. Este eje lo puedo poner apuntando para arriba o para abajo (como más me convenga) Puede ser algo así:



Sobre este esquema marco los sentidos de v_0 y de g. Si V_0 y g apuntan en el mismo sentido del eje **y**, serán (**+**) .Si alguna va al revés del eje **y** será (**-**) .(como en el dibujo).
El eje horizontal x puedo ponerlo o no. No se usa en estos problemas pero se puede poner.

2 - La aceleración del movimiento es dato y vale g . Generalmente se la toma como 10 m/s^2. Escribo las ecuaciones del movimiento. Incluso puedo poner la ecuación complementaria que me puede llegar a servir si no me dan el tiempo.

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + g \cdot t \\ a = cte = g \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Ecuaciones Horarias}$$

$$v_f^{\,2} - v_0^{\,2} = 2 \cdot g \cdot (y_f - y_0) \quad \leftarrow \text{Ec. Complementaria}$$

Si, por ejemplo en el dibujo V_0 fuera 10 m/s, la aceleración de la gravedad fuera 9,8 m/s^2 y la altura del edificio fuera de 20 m, las ecuaciones horarias quedarían:

$$\begin{cases} Y = 20\,m + 10\,\frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot t^{\,2} \\ V_f = 10\,\frac{m}{s} + \left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot t \\ a = -\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2} = cte \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Reemplacé por los Datos}$$

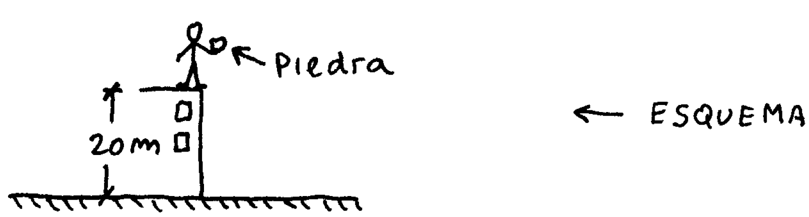
3 - Usando las primeras 2 ecuaciones horarias despejo lo que me piden.

En este tipo de problemas suelen pedirte siempre las mismas cosas. Puede ser el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. Puede ser la velocidad inicial con la que fue lanzado. Puede ser cuánto tarda en caer. Siempre son cosas por el estilo. Pueden tomarte un problema de encuentro también. En ese caso hay que plantear las ecuaciones horarias para cada uno de los cuerpos y después seguir los pasos de siempre para resolver problemas de encuentro.

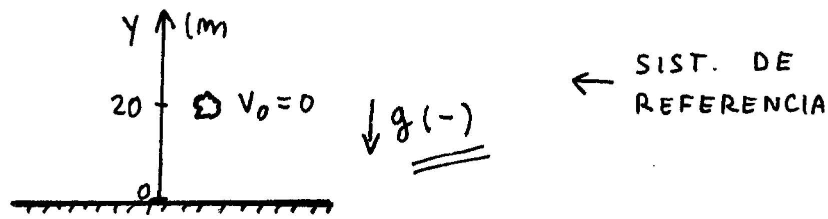
Ejemplo (CAIDA LIBRE Y TIRO VERTICAL)

Un tipo está parado a 20 m de altura. Calcular qué tiempo tarda y con qué velocidad toca el suelo una piedra si el tipo:
a)- La deja caer.
b)- La tira para abajo con V_0 = 10 m/s.
c)- La tira para arriba con V_0 = 10 m/s.

Un esquema de lo que pasa es el siguiente:



Voy al caso **a)** donde el tipo deja caer la piedra. Elijo mi sistema de referencia y marco v_0 y g con su signo. En este caso V_o vale cero porque la piedra se deja caer.



Reemplazo por los valores y las ecuaciones del movimiento quedan así :

$$\begin{cases} Y = 20\,m + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot t^2 \\ V_f = 0 + \left(-9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot t \\ a = -\ 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = cte \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Ecuaciones horarias}$$

El tiempo que la piedra tarda en caer lo despejo de la 1ª ecuación. Cuando la piedra toca el suelo su posición es y = 0. Entonces en la primera ecuación reemplazo **y** por cero. Me queda :

$$0 = 20\,m - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}9\,\frac{m}{s^2}\,t^2 = 20\,m \Rightarrow t^2 = \frac{20\,m}{4{,}9\,m/s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 2{,}02\,seg} \quad \leftarrow \text{Tiempo que tarda}$$

Reemplazando este tiempo en la segunda ecuación tengo la velocidad con que toca el piso :

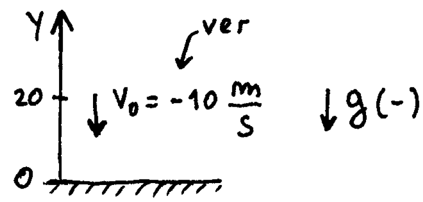
$$V_f = -9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot 2{,}02s$$

$$\boxed{V_f = -19{,}8\,\frac{m}{s}} \quad \leftarrow \quad \text{Velocidad de la piedra al tocar el suelo.}$$

El signo negativo de V_f me indica que la velocidad va en sentido contrario al eje **y** Siempre conviene aclarar esto.

b) - La tira para abajo con V_0 = 10 m/s.

Tomo el mismo sistema de referencia que tomé antes. Eje Y positivo vertical hacia arriba. Ahora la velocidad inicial es (-) porque va al revés del eje Y. (Atento).



Igual que antes, cuando la piedra toca el suelo, y = 0. Entonces:

$$(\,y = 0\,) \;\Rightarrow \qquad 0 = 20\,m - 10\,\frac{m}{s}\cdot t - 4{,}9\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{4{,}9\,\frac{m}{s^2}}_{a}\cdot t^{\,2} + \underbrace{10\,\frac{m}{s}}_{b}\cdot t \;\underbrace{-\,20\,m}_{c} = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática. Fijate que te marqué los valores de a, b y c. Entonces reemplazo los valores de a, b y c en la fórmula de la ecuación cuadrática.

$$t_{1,2} = \frac{-\,b \pm \sqrt{\,b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-10\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2 - 4\cdot 4{,}9\,\;\frac{m}{s^2}\cdot(-\,20\,m)}}{2\cdot 4{,}9\,\;\frac{m}{s^2}}$$

Haciendo las cuentas :

$$\Rightarrow \qquad t_{1,2} = \frac{-10\,\frac{m}{s} \pm 22{,}18\,\frac{m}{s}}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \cancel{t_1 = -3{,}28\,seg} \quad ; \quad \boxed{t_2 = 1{,}24\,seg} \quad \leftarrow \text{ Tiempo de caida.}$$

(Taché la 1ª solución porque tiempos negativos no tienen sentido físico) . Ahora voy a reemplazar este tiempo de 1,24 segundos en la 2ª ecuación:

Reemplazando t= 1,24 seg en $V_f = V_o + g\ t$ calculo la velocidad final. (= al tocar el piso). Me queda :

$$V_f = -10\,\frac{m}{s} - 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}24\ s$$

$$\boxed{V_f = -22{,}18\,\frac{m}{s}} \quad \leftarrow \quad \text{Velocidad al tocar el piso.}$$

c) - Para el caso cuando el tipo la tira para arriba con V_0 = 10 m/s, el signo de V_o cambia. Ahora V_0 es positiva. Pero... Ojaldre !. El signo de g **NO** cambia ! . La gravedad sigue apuntando para abajo (como siempre). Entonces al ir al revés del eje **Y** su signo es negativo. Las ecuaciones horarias quedan:

$$\begin{cases} Y = 20\,m + 10\,\frac{m}{s}\,t - 4{,}9\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \\ V_f = 10\,\frac{m}{s} - 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot t \end{cases}$$

Haciendo lo mismo que en los 2 casos anteriores me queda:

$t_2 = \cancel{-1{,}24}\ s$ $\quad \underline{t_1 = 3{,}28\ s}$ ← TIEMPO DE CAIDA

$\underline{V_f = -22{,}18\ m/s}$ ← V AL TOCAR EL PISO.

Fijate que en los casos b) y c) el tiempo de caída no dio lo mismo. Eso es lógico. En un caso estoy tirando la piedra para arriba y en el otro para abajo
Pero en los casos b) y c) la velocidad de la piedra al tocar el piso... SI dio lo mismo !. Hummmmm....
¿ Estará bien ?
Esto me estaría diciendo que al tirar una piedra con una velocidad inicial "ve cero" para arriba o para abajo, ésta toca el piso con la misma velocidad. (Raro).
¿ Podrá ser eso ?...
Rta: Sí. No es que "puede ser que sea así ". **Tiene** que ser así. (Pensalo).

Fin Teoría de Caída Libre y Tiro Vertical.
Próximo tema: Tiro oblicuo !